# Dritte Abhandlung über die Transformation und Bestimmung von Doppelintegralen*

Carl Jacobi

## Über die Substitution

$$\cos\eta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}}$$

### 1.
### Ein allgemeiner Ausdruck für das Oberflächenelement einer Kugel

Wir wollen festlegen, dass $x$, $y$, $z$ die orthogonalen Koordinaten eines Punktes auf der Oberfläche einer Kugel bezeichnen, deren Mittelpunkt den Ursprung der Koordinaten bezeichnet und deren Radius $= 1$ ist, woher

*Originaltitel: "De Transformatione et Determinatione Integralium duplicium Commentatio tertia", zuerst publiziert in: *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 10* (1832): pp. 101 – 128, Nachdruck in: Jacobi's Gesammelte Werke: Band 3, pp. 159 – 190, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$xx + yy + zz = 1$$

ist. Es sei weiter $dS$ das Element der Kugeloberfläche, es ist bekannt, dass $dS$ durch zwei von den Variablen $x$, $y$, $z$ auf diese Weise ausgedrückt wird:

$$(1) \qquad \begin{cases} dS = \dfrac{dydz}{\sqrt{1-yy-zz}} = \dfrac{dzdx}{\sqrt{1-zz-xx}} = \dfrac{dxdy}{\sqrt{1-xx-yy}}, \\ \text{oder:} \\ dS = \dfrac{dydz}{x} = \dfrac{dzdx}{y} = \dfrac{dxdy}{z}. \end{cases}$$

Dasselbe Element, nach Setzen von

$$x = \cos\eta, \quad y = \sin\eta\cos\vartheta, \quad z = \sin\eta\sin\vartheta,$$

ist bekannt

$$(2) \qquad dS = \sin\eta d\eta d\vartheta$$

zu werden.

Um einen allgemeinen Ausdruck des Flächenelements der Kugel zu erhalten, wollen wir annehmen, dass nach Vorgabe dreier beliebiger Funktionen $u$, $v$, $w$ der Variablen $\varphi$, $\psi$ die Koordinaten eines Punktes auf der Kugel diese werden:

$$x = \frac{u}{\sqrt{uu+vv+ww}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{uu+vv+ww}}, \quad z = \frac{w}{\sqrt{uu+vv+ww}},$$

und wollen fragen, wie $dS$ durch die Variablen $\varphi$, $\psi$ ausgedrückt wird.

Und zuerst bemerke ich, dass aus der bekannten Theorie der Transformation von Doppelintegralen Formel (1) sofort gibt:

$$xdS = \left[\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi} - \frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right] d\varphi d\psi,$$

$$ydS = \left[\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi} - \frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right] d\varphi d\psi,$$

$$zdS = \left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right] d\varphi d\psi.$$

Nachdem jene drei Formeln respektive mit $x$, $y$, $z$ multipliziert und anschließend addiert worden sind, geht hervor:

$$(3)\quad dS = \left\{ x \left[\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi} - \frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right] + y \left[\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi} - \frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right] + z \left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right] \right\} d\varphi d\psi.$$

Wir wollen in dieser Formel anstelle von $x$, $y$, $z$ die Brüche

$$x = \frac{u}{t}, \quad y = \frac{v}{t}, \quad z = \frac{w}{t}$$

einsetzen; der Ausdruck auf der rechten Seite erfreut sich der einzigartigen Eigenschaft, dass nach gemachter Substitution die partiellen Differentiale des Nenners $t$ in ihm nicht aufgefunden werden; oder es wird allgemein sein:

$$(4)\quad \begin{cases} x \left[\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi} - \frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right] + y \left[\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi} - \frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right] + z \left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right] \\ = \frac{1}{ttt}\left\{ u \left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial w}{\partial\psi} - \frac{\partial v}{\partial\psi}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right] + v \left[\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\psi} - \frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right] + w \left[\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right] \right\} \end{cases}$$

Es wird nämlich:

$$x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{1}{tt}\left[u\frac{\partial v}{\partial\varphi} - v\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right],$$

$$y\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{1}{tt}\left[v\frac{\partial w}{\partial\varphi} - w\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right],$$

$$z\frac{\partial x}{\partial\varphi} - x\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \frac{1}{tt}\left[w\frac{\partial u}{\partial\varphi} - u\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right],$$

während die mit $\frac{\partial t}{\partial \varphi}$ multiplizierten Terme verschwinden. Nach respektivem Multiplizieren der Gleichungen mit

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{1}{t}\frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{w}{tt}\frac{\partial t}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{u}{tt}\frac{\partial t}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{t}\frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{v}{tt}\frac{\partial t}{\partial \psi}$$

und anschließender Addition, verschwinden auch die mit $\frac{\partial t}{\partial \psi}$ multiplizierten Terme, woher Formel (4.) hervorgeht.

Nach Aufstellen von (3), (4) und Setzen von

$$tt = uu + vv + ww$$

sehen wir nun, *wenn wir freilich*

$$\cos\eta = \frac{u}{\sqrt{uu+vv+ww}}, \quad \sin\eta\cos\vartheta = \frac{v}{\sqrt{uu+vv+ww}}, \quad \sin\eta\sin\varphi = \frac{w}{\sqrt{uu+vv+ww}}$$

*setzen, während u, v, w drei beliebige Funktionen der Variablen φ, ψ, dass das Oberflächenelement der Kugeloberfläche wird:*

$$(5) \quad \begin{cases} dS = \sin\eta d\eta d\vartheta \\ = \dfrac{\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial \psi}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] + v\left[\frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right] + w\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right]\right\} d\varphi d\psi}{[uu+vv+ww]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck.

## 2.

Wir wollen die Anwendung der allgemeinen Formel (5) auf den einfachsten Fall machen, in welchem

$$u = m\cos\varphi, \quad v = n\sin\varphi\cos\psi, \quad w = p\sin\varphi\sin\psi$$

ist, oder

$$
(6) \qquad \begin{cases} \cos\eta = \dfrac{m\cos\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}}, \\ \sin\eta\cos\vartheta = \dfrac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}}, \\ \sin\eta\sin\vartheta = \dfrac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}}. \end{cases}
$$

In diesem Fall ist leicht klar, dass Formel (5) in diese übergeht:

$$
(7) \qquad \sin\eta d\eta d\vartheta = \frac{mnp\sin\varphi d\varphi d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}.
$$

Zu dieser gelangt man auch, indem man diese Substitutionen nacheinander verwendet:

$$
\cos\eta = \frac{m}{\sqrt{mm + (nn\cos^2\psi + pp\sin^2\psi)\tan^2\varphi}}, \quad \tan\vartheta = \frac{p\tan\psi}{n},
$$

welche mit den vorhergehenden übereinstimmen, und in leichter Weise geben:

$$
(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{mnp\sin\varphi d\varphi d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{np\sin\eta d\eta d\psi}{nn\cos^2\psi + pp\sin^2\psi}, \\ \dfrac{np\sin\eta d\eta d\psi}{nn\cos^2\psi + pp\sin^2\psi} = \sin\eta d\eta d\vartheta. \end{cases}
$$

Diese ergeben zusammen die Formel (7).

Wir wollen umgekehrt $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ durch $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ ausdrücken. Es sei der Kürze wegen

$$
R = mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi;
$$

aus den Formeln (6)

$$\cos\eta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{R}}, \quad \sin\eta\cos\vartheta = \frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{R}}, \quad \sin\eta\sin\varphi = \frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{R}},$$

nachdem der Kürze wegen wieder

$$P = \frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}$$

gesetzt worden ist, folgt:

$$(9) \qquad RP = 1,$$

woher:

$$(10) \qquad \cos\varphi = \frac{\cos\eta}{m\sqrt{P}}, \quad \sin\varphi\cos\psi = \frac{\sin\eta\cos\vartheta}{n\sqrt{P}}, \quad \sin\varphi\sin\psi = \frac{\sin\eta\sin\vartheta}{p\sqrt{P}}.$$

Die vorhergehenden Formeln dienen in angenehmer Weise zur Transformation der Integrale durch die vorgelegte Substitution.

## 3.

Durch die vorgelegte Substitution *wird das Doppelintegral*

$$\int\int \frac{U\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

*in welchem U eine gerade rationale Funktion der Größen* $\cos\varphi$*,* $\sin\varphi\cos\psi$*,* $\sin\varphi\sin\psi$ *war, immer in ein anderes transformiert, in welchem sich das Element einer rationalen Form erfreut.* Es nämlich leicht klar, dass $U$ eine durch $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ rationale ausgedrückte Funktion sein wird; daher hat das Integral, in welches das vorgelegte umgewandelt wird,

$$\frac{1}{mnp}\int\int \frac{U\sin\eta d\eta d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}},$$

hat die besagte Form.

Was die Grenzen betrifft, folgt aus den oben dargebotenen Formeln

$$\cos\eta = \frac{m}{\sqrt{mm + (nn\cos^2\psi + pp\sin^2\psi)\tan^2\varphi}}, \quad \tan\vartheta = \frac{p\tan\psi}{n},$$

dass sowohl die Winkel $\eta$, $\varphi$ und die Winkel $\vartheta$, $\psi$ zugleich von 0 bis hin zu $\frac{\pi}{2}$ wachsen. Sooft also das vorgelegte Integral über den Oktanten der Kugel erstreckt wird, oder von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bis hin zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, muss auch das transformierte Integral über den Oktanten der Kugel erstreckt werden, oder von $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ bis hin zu $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Daher folgt, *sooft U eine ganz rationale Funktion von* $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi\cos^2\psi$, $\sin^2\varphi\sin^2\psi$ *war, dass das Doppelintegral*

$$\int\int \frac{U\sin\varphi d\varphi d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}},$$

*erstreckt von* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *bis hin zu* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, *immer entweder durch elliptische Integrale, welche sich auf die erste und zweite Gattung beziehen, oder sogar algebraisch ausgedrückt werden kann.* Denn das vorgelegte Integral besteht aus den Termen

$$\int\int \frac{(\cos\varphi)^{2\alpha}\cdot(\sin\varphi\cos\psi)^{2\beta}\cdot(\sin\varphi\sin\psi)^{2\gamma}\cdot\sin\varphi d\varphi d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}},$$

welche durch unsere Substitution in die folgenden transformiert werden:

$$\frac{1}{m^{2\alpha+1}n^{2\beta+1}p^{2\gamma+1}}\int\int \frac{(\cos\eta)^{2\alpha}\cdot(\sin\eta\cos\varphi)^{2\beta}\cdot(\sin\eta\sin\vartheta)^{2\gamma}\cdot\sin\eta d\eta d\vartheta}{\left[\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}\right]^{\alpha+\beta+\gamma+1-n}}.$$

Diese Integral, zwischen den angenommenen Grenzen genommen, sofern $n \geq \alpha + \beta + \gamma + 1$ gilt, ist leicht klar algebraisch zu werden; denn in dem Fall wird die zu integrierende Funktion ganz. Sooft aber $\alpha + \beta + \gamma + 1 > n$ ist, nachdem die erste Integration nach $\vartheta$ ausgeführt worden ist, werden wir zu Integralen geführt, welche bekannt sind auf die erste und zweite Gattung von elliptischen Integralen zurückgeführt werden zu können.
Aus diesen Erläuterungen folgt auch leicht, *sooft R außer den Quadraten* $\cos\varphi'$,

$\sin\varphi'\cos\psi'$, $\sin\varphi'\sin\psi'$ *auch die Produkte von je zweien enthält, und $U$ eine beliebige ganz rationale Funktion deren bezeichnet, dass das Doppelintegral*

$$\int\int \frac{U \sin\varphi' d\varphi' d\psi'}{R^{\frac{2n+1}{2}}},$$

*erstreckt über die ganze Kugel, entweder algebraisch oder durch elliptische Integrale ausgedrückt wird.*

Denn durch die Koordinatentransformation wird das Integral in ein anderes der Form:

$$\int\int \frac{U \sin\varphi d\varphi d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}}$$

transformiert, welches auch selbst über die ganze Kugel erstreckt wird; daher können aus dem Zähler $U$ alle Terme verworfen werden, die nicht aus den Quadraten von $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ zusammengesetzt sind, welche natürlich, zwischen den angegebenen Grenzen integriert, verschwindende Terme ergeben. Nachdem also diese Terme verworfen worden sind, nimmt das Integral die oben angegebene Form an.

## 4.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen wird leicht das vom hoch geehrten Cauchy einst vorgelegte Theorem (*Sur l'intégration des èquations linèaires aux differences partielles et à coefficients constants: Journal de l'école polytechnique, cah. XIX, p. 529*) bewiesen; natürlich, dass das Doppelintegral

$$\int\int F\left(\frac{a\cos\varphi + b\sin\varphi\cos\psi + c\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi\cos^2\psi + C\sin^2\varphi\sin^2\psi}}\right)$$
$$\cdot\frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{[A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi\cos^2\psi + C\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}},$$

über die ganze Sphäre erstreckt,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{ABC}}\int_0^\pi F\left(\sqrt{\frac{aa}{A}+\frac{bb}{B}+\frac{cc}{C}}\cdot\cos\varphi'\right)\sin\varphi' d\varphi'$$

wird; daher wird, nach Setzen von

$$\int\limits_{-x}^{x} F(x)dx = x\psi(xx),$$

wird das vorgelegte Integral sein:

$$\frac{2\pi\psi\left(\frac{aa}{A}+\frac{bb}{B}+\frac{cc}{C}\right)}{\sqrt{ABC}}.$$

Um dies zu beweisen, sei

$$A = mm, \quad B = nn, \quad C = pp;$$

das vorgelegte Integral wird durch unsere Substitution in dieses transformiert

$$\frac{1}{mnp}\int\int F\left(\frac{a\cos\eta}{m}+\frac{b\sin\eta\cos\vartheta}{n}+\frac{c\sin\eta\sin\vartheta}{p}\right)\sin\eta d\eta d\varphi.$$

Dieses, wie der illustre Poisson zuerst bemerkt hat, geht durch eine Koordinatentransformation leicht in dieses über:

$$\frac{1}{mnp}\int\int F\left(\sqrt{\frac{aa}{mm}+\frac{bb}{nn}+\frac{cc}{pp}}\cdot\cos\varphi'\right)\sin\varphi' d\varphi' d\vartheta',$$

welches also von $\vartheta' = 0$ bis hin zu $\vartheta' = 2\pi$ integriert die Form annimmt, welche der hoch geehrte Cauchy vorgestellt hat.

Der außerordentliche Herr ist zu angegebenen Formel vermöge ziemlich eleganter Anwendungen des allbekannten Lehrsatzes gelangt, welcher den Namen seines Entdeckers Fourier trägt. Unsere Methode wird vielleicht direkter erscheinen; sie gibt sogar unbestimmte Transformationen an die Hand.

## 5.

Mithilfe der von uns vorgelegten Substitution gelingt auch die Bestimmung der Fläche eines Ellipsoiden, welche als erster mit weit anderen Methoden der illustre Legendre in *applicationibus functionum ellipticarum ad geometriam* angegeben hat, welche in den*Exercitiis calculi integralis* oder in *Tractatu de functionibus ellipticis* (Vol. I) gefunden werden. Es sei nämlich

$$mmxx + nnyy + ppzz = 1$$

die Gleichung für einen Ellipsoid, während $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$ die Halbachsen bezeichnen; nachdem

$$x = \frac{\cos\varphi}{m}, \quad y = \frac{\sin\varphi\cos\psi}{n}, \quad z = \frac{\sin\varphi\sin\psi}{p},$$

gesetzt worden ist, weil klar und bekannt ist, dass es geschehen kann, wird leicht bewiesen, dass das Flächenelement

$$\frac{1}{mnp} \cdot \sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}\sin\varphi d\varphi d\psi$$

sein wird. Dieses nimmt aus dem, was wir oben gesagt haben, durch die Winkel $\eta$, $\vartheta$ ausgedrückt eine rationale Form an, und wird zweimal integriert ohne Mühe durch elliptische Integrale ausgedrückt. *Es sind aber* $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$, *mit deren Hilfe das Flächenelementsdes Ellipsoids rational ausgedrückt wird, die Kosinus der Winkel, welche die Normale in einem Punkt der Oberfläche des Ellipsoiden mit seinen Achsen bildet.* Natürlich ist aus den Elementen der Geometrie bekannt, dass diese Kosinus sind:

$$\frac{mmx}{\sqrt{m^4xx + n^4yy + p^4zz}}, \quad \frac{nny}{\sqrt{m^4xx + n^4yy + p^4zz}}, \quad \frac{ppz}{\sqrt{m^4xx + n^4yy + p^4zz}}$$

oder durch die Winkel $\varphi$, $\psi$ ausgedrückt:

$$\frac{m\cos\varphi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}} = \cos\eta,$$

$$\frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}} = \sin\eta\cos\vartheta,$$

$$\frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}} = \sin\eta\sin\vartheta,$$

was zu beweisen war.

Wir wollen das Vorhergehende an einigen Beispielen illustrieren; in diesen, wenn nichts anderes gesagt wird, nehmen wir an, dass die Integrale über den Oktanten der Kugel erstreckt werden, oder von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, und daher auch von $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ bis hin zu $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

## 6.
## Beispiel I

$$A = \int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}$$

Unter Verwendung der vorgelegten Substitution wird aus (7) $A$ in den folgenden sehr einfachen Ausdruck transformiert:

$$A = \int\int \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{mnp},$$

und daher wird nach Ausführen der Integrationen innerhalb der angegebenen Grenzen:

$$A = \frac{\pi}{2mnp}.$$

Diesen Wert hat der hoch geehrte Cauchy an erwähnter Stelle aus der oben zitierten Formel (§ 4) abgeleitet, indem er die mit dem vorangestellten $F$ bezeichnete Funktion einer Konstante gleich setzt. Dasselbe hat als erster schon der illustre Lagrange (*Mém. de l'Acad. de Berlin a. 1792 p. 261*), während er die Masse eines Ellipsoiden gesucht hat.

## 7.
## Beispiel II

$$B = \int\int \frac{\sin d\varphi d\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}}$$

Wir haben in § 2 diese Formeln angegeben:

$$\sin\eta d\eta d\vartheta = \frac{mnp\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{R^3}}, \quad RP = 1,$$

woher

$$\frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{R}} = \frac{1}{mnp}\frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{P}.$$

Daraus geht hervor:

$$B = \frac{1}{mnp}\int\int\frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{\dfrac{\cos^2\eta}{mm}+\dfrac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn}+\dfrac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}.$$

Nach Integrieren nach $\vartheta$ wird sofort:

$$B = \frac{\pi}{2mnp}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\eta d\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{\cos^2\eta}{mm}+\dfrac{\sin^2\eta}{nn}\right)\left(\dfrac{\cos^2\eta}{mm}+\dfrac{\sin^2\eta}{pp}\right)}}.$$

Damit dieses Integral in die übliche Form von elliptischen Integralen gebracht wird, wollen wir die Größen $m$, $n$, $p$ unterscheiden und $m > n > p$ setzen. Das lässt sich nach Belieben tun. Denn das vorlegte Doppelintegral ändert den vorgelegten Wert nicht, wenn die Größen $m$, $n$, $p$, oder was dasselbe ist, die Größen $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ untereinander vertauscht werden. Das wird am gefundenen Wert von $B$ leicht bewiesen. Denn nach Setzen von entweder $\frac{n}{m}\tan\eta$ oder $\frac{p}{m}\tan\eta$ anstelle von $\tan\eta$, woher die Grenzen nicht verändert werden, erhält man dieselben Transformationen, als wenn entweder $n$ oder $p$ mit $m$ vertauscht werden. Aber allgemein, sofern das Doppelintegral

$$\int\int F(\cos\varphi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\varphi\sin\psi)\sin\varphi d\varphi d\psi$$

über den Oktanten der Kugel erstreckt wird, lassen sich in der Funktion $F$ jene Größen $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ in beliebiger Weise miteinander vergleichen, während der Wert des Integrals derselbe bleibt.

Wir wollen festlegen:

$$(11)\qquad \sqrt{\frac{\cos^2\eta}{mm}+\frac{\sin^2\eta}{pp}} = \frac{\cos w}{p},\quad \sqrt{\frac{\cos^2\eta}{mm}+\frac{\sin^2\eta}{nn}} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}{n} = \frac{\Delta(w)}{n},$$

was möglich ist, wenn freilich $kk$ konstant festgelegt:

$$(12)\quad kk = \frac{mm-nn}{mm-pp}, \quad \text{daher auch} \quad k'k' = 1 - kk = \frac{nn-pp}{mm-pp}.$$

Man hat zugleich:

$$(13)\quad \cos\eta = \frac{m\sin w}{\sqrt{mm-pp}}, \quad \sin\eta d\eta = \frac{-m\cos w dw}{\sqrt{mm-pp}}.$$

Daher

$$(14)\quad \frac{1}{mnp} \cdot \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{\dfrac{\cos^2\eta}{mm} + \dfrac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \dfrac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}$$
$$= \frac{-np\cos w dw d\vartheta}{\sqrt{mm-pp}[pp\Delta^2(w)\cos^2\vartheta + nn\cos^2 w\sin^2\vartheta]}.$$

Sofern $\eta = 0$ ist, wird $\cos w = \frac{p}{m}$, sofern $\eta = \frac{\pi}{2}$ ist, wird $\cos w = 1$, $w = 0$; daher werden bezüglich des Winkels $w$ die Grenzen $\arccos\frac{p}{m}$ und 0 sein.

Nach Bemerken dieses Dinge, findet man

$$B = \frac{\pi}{2\sqrt{mm-pp}} \int_0^\pi \frac{dw}{\Delta(w)} = \frac{\pi}{2} \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{mm\cos^2 w + nn\sin^2 w - pp}}$$

oder unter Verwendung der Notation des illustren Legendre:

$$B = \frac{\pi F(w,k)}{2\sqrt{mm-pp}},$$

wenn freilich $\cos w = \frac{p}{m}$, $k = \sqrt{\frac{mm-nn}{mm-pp}}$ ist.

## 8.

Die Ausdrücke von $B$ durch die einfachen Integrale, welche wir im Vorhergehenden angegeben haben, obwohl, was geschehen muss, sie den Wert nicht verändern, nachdem $m$, $n$, $p$ miteinander vertauscht werden, erfreuen sich dennoch nicht einer symmetrischen Form dieser Größen. Eine Form von dieser Art hat der Ausdruck, welcher sich aus dem oben gefundenen Wert von $A$

mit den folgenden Betrachtungen ableiten lässt.

Man setze in Beispiel I. $mm+x$, $nn+x$, $pp+x$ anstelle von $mm$, $nn$, $pp$, woher man findet:

$$A = \int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{(x+mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieses gibt mit $\frac{1}{2}dx$ multipliziert und von $x=0$ bis hin zu $x=\infty$ integriert

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty A dx = \int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}} = B.$$

Aber nun, nach der erwähnten Vertauschung, wird aus Beispiel I:

$$A = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+mm)(x+nn)(x+pp)}}.$$

Daher haben wir:

$$(15)\qquad \begin{cases} B = \int\int \dfrac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}} \\ \quad = \dfrac{\pi}{4}\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{(x+mm)(x+nn)(x+pp)}}. \end{cases}$$

Daher geht, nachdem wir in dem transformierten Wert von $B$

$$B = \frac{1}{mnp}\int\int \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{\dfrac{\cos^2\eta}{mm} + \dfrac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \dfrac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}$$

wir $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ anstelle von $m$, $n$, $p$ gesetzt und $\varphi$, $\psi$ anstelle von $\eta$, $\vartheta$ geschrieben haben, hervor:

$$(16)\qquad \int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$= \frac{\pi}{4} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+mmx)(1+nnx)(1+ppx)}},$$

nachdem die Doppelintegrale immer von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bis hin zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ erstreckt worden sind. Jede der beiden Formeln ist sehr elegant. Das andere Integral lässt sich auch so darbieten:

$$\frac{\pi}{4} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x+mm)(x+nn)(x+pp)}}.$$

Überdies leitet man aus (15) den oben gefundenen Wert

$$B = \frac{\pi F(w,k)}{2\sqrt{mm-pp}} = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^w \frac{dw}{\sqrt{mm\cos^2 w + nn\sin^2 w - pp}}$$

sofort ab, nachdem

$$\frac{x+pp}{mm-pp} = \cot^2 w$$

gesetzt worden ist.

## 9.
## Beispiel III: Bestimmung der Fläche des Ellipsoiden

$$C = \int\int \sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi} \cdot \sin\varphi d\varphi d\psi.$$

Wir wollen festlegen, dass die orthogonalen Koordinaten $x$, $y$, $z$ des Punktes durch die zwei Variablen $\varphi$, $\psi$ gegeben sind; es ist bekannt, dass im Allgemeinen das Flächenelement $dS$ der Kugel durch $\varphi$, $\psi$ auf diese Weise ausgedrückt gegeben:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi} - \frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi} - \frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi d\psi.$$

Es sei

$$x = \frac{\cos\varphi}{m}, \quad y = \frac{\sin\varphi\cos\psi}{n}, \quad z = \frac{\sin\varphi\sin\psi}{p},$$

woher

$$mmxx + nnyy + ppzz = 1;$$

die Oberfläche wird die eines Ellipsoiden sein, dessen Halbachsen $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ sind und das Flächenelement wird aus der allgemeinen Formel:

$$dS = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{n^2p^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{p^2m^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{m^2n^2}} \cdot \sin\varphi d\varphi d\psi = \frac{\sqrt{R}\cdot\sin\varphi d\varphi d\psi}{mnp}.$$

Dieses muss, um die ganze Fläche $S$ des Ellipsoiden zu erhalten, von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bis hin zu $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi$ integriert werden; daher

$$S = \frac{8C}{mnp.}$$

Aus unseren Formeln

$$\sin\eta d\eta d\vartheta = mnp\frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{R^3}}, \quad \sqrt{RP} = 1$$

geht hervor:

$$dS = \frac{\sqrt{R}\cdot\sin\varphi d\varphi d\psi}{mnp} = \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{m^2n^2p^2PP};$$

daher sehen wir aus § 5, *während* $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ *die Kosinus der Winkel bezeichnen, welche die Normale in einem Punkt des Ellipsoiden mit den Achsen bildet, dass das Flächenelement sein wird:*

$$dS = \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{m^2n^2p^2\left(\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}\right)^2} = \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{m^2n^2p^2PP}.$$

Wir haben den folgenden transformierten Ausdruck von $C$ gefunden:

$$C = \frac{1}{mnp}\int\int\frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{PP}.$$

Nachdem wir anstelle des Winkels $\eta$ den Winkel $w$ eingeführt haben, wird aus § 7 (11), (13):

$$C = \frac{n^3 p^3}{\sqrt{mm-pp}} \int\int \frac{\cos w dw d\vartheta}{[pp\Delta^2 w \cos^2\vartheta + nn\cos^2 w \sin^2\vartheta]^2}.$$

Nach der Integration von $\vartheta = 0$ bis hin zu $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ hat man:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi}{4\sqrt{mm-pp}} \int\limits_0^w \frac{nn\cos^2 w + pp\Delta^2 w}{\cos^2 w \Delta^2 w} \cdot \frac{dw}{\Delta w} \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{mm-pp}} \left[ nn \int\limits_0^w \frac{dw}{\Delta^3 w} + pp \int\limits_0^w \frac{dw}{\cos^2 w \Delta w} \right]. \end{aligned}$$

Zur weiteren Reduktion bemerke ich, dass nach der Ableitung leicht diese Formeln bewiesen werden:

$$\begin{aligned} kk\frac{d\left(\frac{\sin w \cos w}{\Delta w}\right)}{dw} &= \Delta w - \frac{k'k'}{\Delta^3 w}, \\ \frac{d\left(\frac{\sin w \Delta w}{\cos w}\right)}{dw} &= \frac{k'k'}{\cos^2 w \Delta w} - \frac{k'k'}{\Delta w} + \Delta w, \\ \frac{d\left(\frac{\cos w \Delta w}{\sin w}\right)}{dw} &= \frac{-1}{\sin^2 w \Delta w} + \frac{1}{\Delta w} - \Delta w. \end{aligned}$$

Aus der ersten und er zweiten wird:

$$\int\limits_0^w \frac{dw}{\Delta^3 w} = \frac{E(w)}{k'k'} - \frac{kk}{k'k'} \cdot \frac{\sin w \cos w}{\Delta w},$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{dw}{\cos^2 w \Delta w} = F(w) - \frac{E(w)}{k'k'} + \frac{1}{k'k'} \cdot \frac{\sin w \Delta w}{\cos w}$$

und daher:

$$C = \frac{\pi}{4\sqrt{mm-pp}} \left[ \frac{nn-pp}{k'k'} E(w) + ppF(w) - \frac{kknn}{k'k'} \cdot \frac{\sin w \cos w}{\Delta w} + \frac{pp}{k'k'} \cdot \frac{\sin w \Delta w}{\cos w} \right].$$

In dieser Formel ist aus (7)

$$\cos w = \frac{p}{m}, \quad \Delta w = \frac{n}{m}, \quad kk = \frac{mm-nn}{mm-pp}, \quad k'k' = \frac{nn-pp}{mm-pp},$$

woher der gefundene Ausdruck von $C$ in zur folgenden zusammengezogen wird:

$$C = \frac{\pi m}{4 \sin w} \left[\sin^2 w E(w) + \cos^2 w F(w)\right] + \frac{\pi n p}{4m}.$$

Daher wird die ganze Fläche des Ellipsoiden, dessen Halbachsen $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ sind:

$$S = 2\pi \left[\frac{\sin^2 w E(w) + \cos^2 w F(w)}{np \sin w} + \frac{1}{mm}\right].$$

## 10.
## Über die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \sin h \Delta(h', \lambda') \\ \sin\varphi\cos\psi &= \cos h \cos h' \\ \sin\varphi\sin\psi &= \sin h' \Delta(h, \lambda), \end{aligned}\right| \begin{aligned} \cos\eta &= \sin i \Delta(i', k') \\ \sin\eta\cos\vartheta &= \cos i \cos i', \\ \sin\eta\sin\vartheta &= \sin i' \Delta(i, k). \end{aligned}$$

Die vorhergehende Bestimmung der Fläche des Ellipsoiden stimmt mit der überein, welche einst der illustre Legendre mit zwei verschiedenen Methoden gefunden hat, von denen die eine über die Entwicklung in eine Reihe vorgeht; die andere Methode, die der illustre Herr verwendet hat, ist auf die Transformation von Variablen gestützt. Ich sage, dass sie umso bemerkenswerter ist, weil das Flächenelement, durch die neuen Variablen ausgedrückt, in zwei Teile geteilt wird, welche jeweils *getrennte Variablen haben, sodass sie zweimal integriert die Produkte von zwei einfachen Integralen werden.* Aber die Form, in welcher die separierten Variablen gefunden werden, scheint, so wie es bei Differentialgleichungen der Fall ist, auch bei den Doppelintegralen sehr hilfreich zu sein. Für das gegenwärtige Ziel hat der illustre Herr die Fläche in unendlich kleine rechteckige Elemente aufgeteilt, welche bei der gegenseitigen Überschneidung von den einen Krümmungslinien mit den anderen Krümmungslinien gebildet werden. Diese Elemente hat er durch zwei solche Variablen ausgedrückt, dass, während die eine der beiden konstant bleibt, aber die andere variiert wird, die auf derselben Kurve der Krümmung liegenden Elemente erhalten werden. Nachdem aber für jede der beiden Variablen die Integration zwischen konstanten Grenzen durchgeführt worden ist, wird daraus die Fläche des Rechtecks gefunden, die von vier Krümmungslinien eingeschlossen wird. Diese werden im Allgemeinen mit der dritten Gattung von elliptischen Integralen ausdrückt gefunden. Die wesentlichen Schritte der Rechnung sind diese. Es sei

$$\lambda\lambda = \frac{pp(mm-nn)}{nn(mm-pp)}, \quad \lambda'\lambda' = \frac{mm(nn-pp)}{nn(mm-pp)},$$

und man setze:

$$\begin{aligned} mx &= \cos\varphi &&= \sin h \Delta(h', \lambda'), \\ ny &= \sin\varphi\cos\psi &&= \cos h \cos h', \\ pz &= \sin\varphi\sin\psi &&= \sin h' \Delta(h, \lambda), \end{aligned}$$

während wie oben $x$, $y$, $z$ die Koordinaten eines Punktes auf der Oberfläche des Ellipsoiden bezeichnen, dessen Gleichung

$$mmxx + nnyy + ppzz = 1$$

ist oder Halbachsen $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ sind. Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, wird aus der bekannten Theorie der Krümmung von Kurven bewiesen, sofern $h'$ konstant ist und $h$ variiert wird, dass die Punkte der einen Hauptkrümmung erhalten werden; sooft aber $h$ konstant ist und $h'$ variiert wird, werden die Punkte der anderen Hauptkrümmung erhalten.

In der vorgelegten Substitution werden sowohl $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ durch zwei Faktoren ausgedrückt, von welchen der eine den anderen als Variable enthält, und dasselbe wird entdeckt bei einer durch die Winkel $h$, $h'$ ausgedrückten Funktion $R$ zu passieren. Nachdem die Substitution durchgeführt worden ist, geht nämlich hervor:

$$\begin{aligned} \sqrt{R} &= \sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi} \\ &= \frac{1}{n}\sqrt{mm\sin^2 h + nn\cos^2 h} \cdot \sqrt{pp\sin^2 h' + nn\cos^2 h'} : \end{aligned}$$

Weiter erhält man das Flächenelement der Sphäre, ausgedrückt durch $h$, $h'$:

$$\sin\varphi d\varphi d\psi = \frac{(\lambda\lambda\cos^2 h + \lambda'\lambda'\cos^2 h')dhdh'}{\Delta(h,\lambda)\Delta(h',\lambda')}.$$

Daher sehen wir, dass auch dieses Element in zwei Teile geteilt wird, welche jeweils separierte Variablen hat.

Durch die Gleichungen, die denen vollkommen identisch sind, in denen $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ von den Winkeln $h$, $h'$ abhängen, werden $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ durch die neuen Winkel $i$, $i'$ ausgedrückt, wenn man freilich

$$\tan i = \frac{m}{n}\tan h, \quad \tan i' = \frac{p}{n}\tan h'$$

setzt. Nach Festlegen von all diesem hat man

$$\sqrt{R} = \frac{mnp}{\sqrt{mm\cos^2 i + nn\sin^2 i}\cdot\sqrt{pp\cos^2 i' + nn\sin^2 i'}};$$

$$\frac{n\Delta(h,\lambda)}{\sqrt{mm\sin^2 h + nn\cos^2 h}} = \Delta(i,k), \quad \frac{n\Delta(h',\lambda')}{\sqrt{pp\sin^2 h' + nn\cos^2 h'}} = \Delta(i',k'),$$

woher

$$\begin{aligned}
\cos\eta = & \quad \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{R}} &= \sin i\Delta(i',k'),\\
\sin\eta\cos\vartheta = & \frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{R}} &= \cos i\cos i',\\
\sin\eta\sin\vartheta = & \frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{R}} &= \sin i'\Delta(i,k)
\end{aligned}$$

und auch:

$$\sin\eta d\eta d\vartheta = \frac{mnp\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{R^3}} = \frac{[kk\cos^2 i + k'k'\cos^2 i']didi'}{\Delta(i,k)\Delta(i',k')}, \qquad (1)$$

wenn freilich die Moduli $k$, $k'$ wie oben

$$k = \sqrt{\frac{mm-nn}{mm-pp}}, \quad k' = \sqrt{\frac{nn-pp}{mm-pp}}$$

gesetzt werden. Nachdem wie oben $\cos w = \frac{p}{m}$ gesetzt wird, lässt sich $\sqrt{R}$ auch diese Form geben:

$$\sqrt{R} = \frac{n}{\sqrt{1-kk\sin^2 w\sin^2 i}\cdot\sqrt{1+k'k'\tan^2 w\sin^2 i'}}.$$

Daher nimmt das Flächenelement des Ellipsoiden $dS$ durch die neuen Winkel $i$, $i'$ ausgedrückt diese Form an:

$$dS = \frac{\sqrt{R} \cdot \sin\varphi d\varphi d\psi}{mnp} = \frac{n^2}{m^2p^2} \cdot \frac{kk\cos^2 i + k'k'\cos^2 i'}{[1 - kk\sin^2 w \sin^2 i]^2[1 + k'k'\tan^2 w \sin^2 i']^2} \cdot \frac{didi'}{\Delta(i,k)\Delta(i',k')}.$$

So sehen wir, dass das Flächenelement des Ellipsoiden, durch die Winkel $i$, $i'$ ausgedrückt, in zwei Teile aufgeteilt wird, in denen die Variablen separiert sind. Also wird nach Setzen von

$$\int \frac{kk\cos^2 idi}{[1 - kk\sin^2 w \sin^2 i]^2\Delta(i,k)} = L, \qquad \int \frac{di'}{[1 + k'k'\tan^2 w \sin^2 i']^2\Delta(i',k')} = M',$$

$$\int \frac{di}{[1 - kk\sin^2 w \sin^2 i]^2\Delta(i,k)} = M, \qquad \int \frac{k'k'\cos^2 i'di'}{[1 + k'k'\tan^2 w \sin^2 i']^2\Delta(i',k')} = L'$$

gefunden:

$$S = \frac{n^2}{m^2p^2}[LM' + L'M].$$

Sooft wir also für jede der beiden Variablen zwischen konstanten Grenzen integrieren, $i = i_1$, $i = i_2$ und $i' = i'_1$, $i' = i'_2$, wird $S$ die Fläche eines auf der Oberfläche des Ellipsoiden gezeichneten Rechtecks, welches von vier Krümmungslinien eingeschlossen ist, von welchen zwei sich auf dieselbe Krümmung beziehen. Die zwei, die sich auf die andere Krümmung beziehen, werden erhalten, sofern in den oben gegebenen Werten der Koordinaten $x$, $y$, $z$ der Buchstabe $h$ als Konstante angesehen wird, und ihm die Werte $\tan h = \frac{n}{m}\tan i_1$, $\tan h = \frac{n}{m}\tan i_2$ zugeteilt werden; die zwei, die sich auf die andere beziehen, wo $h'$ wie eine Konstante behandelt wird, und diesem die Werte $\tan h' = \frac{n}{p}\tan i'_1$, $\tan h' = \frac{n}{p}\tan i'_2$ zugeteilt werden. Es ist klar, dass ein Rechteck von dieser Art allgemein durch elliptische Integrale ausgedrückt wird, welche zur dritten Gattung gehören. Sooft man aber den Oktanten der ganzen Fläche sucht, müssen die Integrale zwischen den Grenzen $h = 0$, $h = \frac{\pi}{2}$; $h' = 0$, $h' = \frac{\pi}{2}$ erstreckt werden, und daher auch zwischen den Grenzen $i = 0$ und $i = \frac{\pi}{2}$, $i' = 0$ und $i' = \frac{\pi}{2}$. In diesem Fall reduzieren sich die elliptischen Integrale zu denen auf die erste und zweite Gattung, woher wir, unter Verwendung verschiedener Reduktionen, zum oben gefundenen Ausdruck geführt werden. Dies findet man ausgeführt bei Legendre.

## 11.

Im Fall, in dem die Integration über den Oktanten der ganzen Fläche erstreckt wird, kann die Reduktion des gefundenen Ausdrucks

$$S = \frac{n^2}{m^2 p^2}[LM' + L'M]$$

nicht ohne außergewöhnliche Funde in die einfachere, oben mit anderen Methoden gefundenen, Form gebracht werden, welches der illustre Legendre über die dritte Gattung von elliptischen Integralen bewiesen hat. Umgekehrt können die sehr außergewöhnlichen Eigenschaften der elliptischen Integrale durch jene Transformation von Doppelintegralen sehr elegant bewiesen werden.

So erhält man eines Beispiels wegen über die gefundene Formel

$$\begin{aligned}\int\int \sin\eta d\eta d\vartheta &= \int\int \frac{kk\cos^2 i + k'k'\cos^2 i'}{\Delta(k,i)\Delta(k',i')} didi' \\ &= \int\int \frac{\Delta^2(k,i) + \Delta^2(k',i') - 1}{\Delta(k,i)\Delta(k',i')} didi'\end{aligned}$$

im Fall, in dem sie für die Winkel $\eta$, $\vartheta$, $i$, $i'$ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ integriert wird, sofort das vom illustren Legendre entdeckte außergewöhnliche Theorem, welches die Relation zwischen den elliptischen Integralen der ersten und zweiten Gattung beschreibt, welche sich auf den Modulus $k$ und sein Komplement $k'$ beziehen,

$$F^1(k)E^1(k') + F^1(k')E^1(k) - F^1(k)F^1(k') = \frac{\pi}{2}.$$

Einen vorzüglichen Beweis derselben, ebenfalls aus einer allgemeinen Formel abgeleitet, hat der hoch geehrte Abel gegeben (Vol. II. Seite 26).

Wir haben oben gesehen, dass die drei Größen $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ die Kosinus der Winkel sind, welche die in einem Punkt des Ellipsoiden gezogene Normale mit den Achsen bildet. Daher ist klar, dass $\sin\eta d\eta d\vartheta$ das Element *der Totalkrümmung* der Fläche ist, wie sie der hoch geehrte Gauss in *Disq. gener. de superf. curvis* genannt hat. Daher findet man mithilfe der gefundenen Formel

$$\int\int \sin\eta d\eta d\vartheta = \int\int \frac{[\Delta^2(k,i)+\Delta^2(k',i')-1]didi'}{\Delta(k,i)\Delta(k',i')}$$

leicht, dass *die Totalkrümmung eines auf der Oberfläche des Ellipsoiden liegenden von vier Krümmungslinien begrenzten Rechtecks diese ist*

$$\begin{aligned} &[F(i,k) - \quad F(i,k)][E(i',k') \ - E(i',k')] \\ + &[F(i_2',k') - F(i',k')][E(i_2,k) \ - E(i,k)] \\ - &\ [F(i_2,k) - F(i_1,k)][E(i_2',k') - E(i_1',k')]. \end{aligned}$$

Die Totalkrümmung des Rechtecks wird der Teil der sphärischen Fläche sein, abgetrennt mit zwei Kegeln, mit der Gleichung

$$\frac{yy}{\cos^2 i} + \frac{kkzz}{\Delta^2(i,k)} = \frac{xx}{\sin^2 i},$$

nach Setzen von $i = i_1$ und $i = i_2$, und zwei Kegeln, mit der Gleichung

$$\frac{yy}{\cos^2 i'} + \frac{k'k'xx}{\Delta^2(i',k')} = \frac{zz}{\sin^2 i'},$$

nach Setzen von $i' = i_1'$, $i' = i_2'$, wenn freilich die Scheitel der Kegel im Zentrum der Kugel festgelegt werden. Dies wird aus den Werten, welche $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ für die Grenzen annehmen, leicht bewiesen. Sooft $i_1 = 0$, $i_1' = 0$ ist, werden aus den Krümmungslinien die Hauptachsen des Ellipsoiden; im Fall $i_2 = i$, $i_2' = i'$ wird die Totalkrümmung

$$F(i,k)E(i'k') + F(i',k')E(i,k) - F(i,k)F(i',k').$$

Ich bemerke noch, dass das Linienelement der Krümmung, während $h'$ oder $i'$ eine Konstante bezeichnen,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{mn}\sqrt{\lambda\lambda\cos^2 h + \lambda'\lambda'\cos^2 h'} \cdot \sqrt{mm\sin^2 h + nn\cos^2 h} \cdot \frac{dh}{\Delta(h,\lambda)} \\ &= \frac{n\sqrt{kk\cos^2 i + k'k'\cos^2 i'}}{mm[1-kk\sin^2 w\sin^2 i]^{\frac{3}{2}}[1+k'k'\tan^2 w\sin^2 i']^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{di}{\Delta(i,k)} \end{aligned}$$

ist; während $h$ oder $i$ eine Konstante bezeichnen,

$$\frac{1}{np}\sqrt{\lambda\lambda\cos^2 h + \lambda'\lambda'\cos^2 h'} \cdot \sqrt{pp\sin^2 h' + nn\cos^2 h'} \cdot \frac{dh'}{\Delta(h',\lambda')}$$

$$= \frac{n\sqrt{kk\cos^2 i + k'k'\cos^2 i'}}{pp[1 - kk\sin^2 w \sin^2 i]^{\frac{1}{2}}[1 + k'k'\tan^2 w\sin^2 i]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{di'}{\Delta(i', k')}.$$

Nachdem die beiden Linienelemente miteinander multipliziert worden sind, geht, was passieren muss, das Flächenelement hervor. Es ist klar, dass die Rektifizierung der Krümmungslinie von den ABEL'schen Transzendenten abhängt.

## 12.
## BEISPIEL IV

$$D = \int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{[m'm'\cos^2\varphi + n'n'\sin^2\varphi\cos^2\psi + p'p'\sin^2\varphi\sin^2\psi]\sqrt{R}}$$

Durch unsere Substitution wird unser vorgelegtes Integral mithilfe von $\eta$, $\vartheta$ auf diese Weise ausgedrückt:

$$D = \frac{1}{mnp}\int\int \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{\frac{m'm'}{mm}\cos^2\eta + \frac{n'n'}{nn}\sin^2\eta\cos\vartheta + \frac{p'p'}{pp}\sin^2\eta\sin^2\vartheta}.$$

Daher erhalten wir aus den in zweiten Beispiel vorgelegten Formeln, wenn wir freilich dort $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, $\frac{p}{p'}$ anstelle von $m$, $n$, $p$ setzen:

$$D = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F(k, w)}{mn'p'\sin w},$$

wobei der Modulus $k$ und die Amplitude $w$ mit diesen Gleichungen definiert werden:

$$kk = \frac{p'p'(mmn'n' - m'm'nn)}{n'n'(mmp'p' - m'm'pp)}, \quad \cos w = \frac{pm'}{mp'}, \quad \Delta(w, k) = \frac{nm'}{mn'}.$$

Oder man erhält auch aus (16) die Formel:

$$D = \int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{[m'm'\cos^2\varphi + n'n'\sin^2\varphi\cos^2\psi + p'p'\sin^2\varphi\sin^2\psi]\sqrt{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\int} \frac{dx}{\sqrt{(mm + m'm'x)(nn + n'n'x)(pp + p'p'x)}}.$$

## 13.
### Beispiel V

$$E = \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{U'\sqrt{U}}$$

$$\begin{aligned} U &= a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\cos^2\psi + c\sin^2\sin^2\psi \\ &\quad +2d\sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi + 2e\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi, \\ U' &= a'\cos^2\varphi + b'\sin^2\varphi\cos^2\psi + c'\sin^2\sin^2\psi \\ &\quad +2d'\sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi + 2e'\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f'\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi. \\ &\quad \text{Grenzen} \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \pi; \quad \psi = 0, \quad \psi = 2\pi. \end{aligned}$$

Das in diesem Beispiel vorgelegte Integral ist um vieles komplizierter als das, über welches wir im vorhergehenden Beispiel geredet haben, weil in den Ausdrücken von $U$, $U'$ außer den Quadraten der Größen $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ noch je zwei miteinander multplizierte gefunden werden. Nichtsdestoweniger finden wir seinen Wert, wenn wir die Substitution, die wir benutzt haben, mit einer zweimal verwendeten Transformation von orthogonalen Koordinaten verbinden. Wir wollen aber annehmen, dass $U$, $U'$ für die gewiss reellen Werte der Werte $\varphi$, $\psi$ immer positive Werte beibehalten; sooft nämlich $U$ auch negative Werte annehmen kann, wird das vorgelegte Integral imaginär, sooft $U'$ auch auch negative Werte annimmt, geht der Wert des Integrals ins Unendliche über.

Und wenn wir $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi\cos\psi$, $r\sin\varphi\sin\psi$ als orthogonale Koordinaten des Punktes betrachten, dessen Abstand vom Ursprung der Koordinaten $= r$ ist, wird durch die erste Transformation der Koordinaten leicht eingesehen, dass $E$ diese Form annehmen kann:

$$E = \int\int \frac{\sin\varphi' d\varphi' d\psi'}{U'\sqrt{GG\cos^2\varphi' + G'G'\sin^2\varphi'\cos^2\psi' + G''G''\sin^2\varphi'\sin\psi}},$$

während $r\cos\varphi'$, $r\sin\varphi'\cos\psi'$, $r\sin\varphi'\sin\psi'$ die transformierten Koordinaten bezeichnen, bezogen auf die Hauptachsen des Ellipsoiden, dessen Gleichung

$$r^2U = 1$$

ist, und dessen Halbachsen $\frac{1}{G}$, $\frac{1}{G'}$, $\frac{1}{G''}$ sind. Und weiter werden die Grenzen des transformierten Integrals $\varphi' = 0$ und $\psi' = \pi$, $\psi' = 0$ und $\psi' = 2\pi$ sein. Aber die Funktion $U'$, durch $\varphi'$, $\psi'$ ausgedrückt, nimmt diese Form an:

$$
\begin{aligned}
U' &= a'' \cos^2 \varphi' + b'' \sin^2 \varphi' \cos^2 \psi' + c'' \sin^2 \varphi' \sin^2 \psi' \\
&\quad + 2d'' \sin^2 \varphi' \cos \psi' \sin \psi' + 2e'' \cos \varphi' \sin \varphi' \sin \psi' + 2f'' \cos \varphi' \sin \varphi' \cos \psi'.
\end{aligned}
$$

Auf das so transformierte Integral wollen wir unsere Substitution anwenden, also

$$
\cos \eta' = \frac{G \cos \varphi'}{\sqrt{R'}}, \quad \sin \eta' \cos \vartheta' = \frac{G' \sin \varphi' \cos \psi'}{\sqrt{R'}}, \quad \sin \eta' \sin \vartheta' = \frac{G'' \sin \varphi' \sin \psi'}{\sqrt{R'}},
$$

nach Setzen von

$$
R' = GG \cos^2 \varphi' + G'G' \sin^2 \varphi' \cos^2 \psi' + G''G'' \sin^2 \varphi' \sin^2 \psi',
$$

wonach das vorgelegte Integral die folgende Form annimmt:

$$
E = \frac{1}{GG'G''} \int \int \frac{\sin \eta' d\eta' d\vartheta'}{U''},
$$

wenn man freilich

$$
\begin{aligned}
U'' &= \frac{a'' \cos^2 \eta'}{GG} + \frac{b'' \sin^2 \eta' \cos^2 \vartheta'}{G'G'} + \frac{c'' \sin^2 \eta' \sin^2 \vartheta'}{G''G''} \\
+2 &\left[ \frac{d'' \sin^2 \eta' \cos \vartheta' \sin \vartheta'}{G'G''} + \frac{e'' \cos \eta' \sin \eta' \sin \vartheta'}{G''G} + \frac{f'' \cos \eta' \sin \eta' \cos \vartheta'}{GG'} \right]
\end{aligned}
$$

setzt. Und wieder werden die Grenzen $\eta' = 0$ und $\eta = \pi$, $\vartheta' = 0$ und $\vartheta' = 2\pi$ sein.

Nun wollen wir an zweiter Stelle $r \cos \eta'$, $r \sin \eta' \cos \vartheta'$, $r \sin \eta' \sin \vartheta'$ als orthogonale Koordinaten des Punktes betrachten, dessen Abstand vom Ursprung der Koordinaten $= r$ ist; es seien $r \cos \eta$, $r \sin \eta \cos \vartheta$, $r \sin \eta \sin \vartheta$ die transformierten Koordinaten, bezogen auf Hauptachsen des Ellipsoiden, dessen Gleichung

$$
rrU'' = 1
$$

ist, und dessen Halbachsen $m$, $n$, $p$ sind. Nachdem das festgelegt worden ist, nimmt das durch $\eta$, $\vartheta$ ausgedrückte Integral natürlich diese sehr einfache Form an:

$$E = \int\int \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{GG'G''\left[\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\eta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}\right]},$$

während die Grenzen des Integrals wieder $\eta = 0$ und $\eta = \pi$, $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 2\pi$ sind. Dieses ist im Beispiel II leicht auf ein elliptisches Integral reduziert worden.

## 14.

Die im Vorhergehenden angegebene Reduktion des vorgelegten Integrals erfordert zwei Transformationen von orthogonalen Koordinaten, welche jeweils von der Lösung einer kubischen Gleichung abhängen. Denn zuerst findet man $GG$, $G'G'$, $G''G''$ als Wurrzel einer kubischen Gleichung, von welchen die Koeffizienten der ersten verwendeten Substitution abhängen, und daher auch die Größen $a''$, $b''$ etc. Durch diese und $G$, $G'$, $G''$ werden danach die Koeffizienten der zweiten kubischen Gleichung dargeboten, deren Wurzeln $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ sind. Aber nach der Rechnung bemerkt man, dass aus jenen Koeffizienten der zweiten kubischen Gleichung diese Größen $G$, $G'$, $G''$ ganz herausgehen, woher wir der Auflösung der ersten kubischen Gleichung nicht bedürfen; sodass das Problem, was von zwei kubischen Gleichungen abzuhängen scheint, in Wirklichkeit nur von einer einzigen abhängt. Ich werde die Rechnung skizzenhaft aufzeigen, welche Rechnung gewiss auch bei anderen Gelegenheiten nützlichen nützlich sein wird.

Die zuerst verwendete Substitution sei:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \alpha\cos\varphi' + \alpha'\sin\varphi'\cos\psi' + \alpha''\sin\varphi'\sin\psi',\\
\sin\varphi\cos\psi &= \beta\cos\varphi' + \beta'\sin\varphi'\cos\psi' + \beta''\sin\varphi'\sin\psi',\\
\sin\varphi\sin\psi &= \gamma\cos\varphi' + \gamma'\sin\varphi'\cos\psi' + \gamma''\sin\varphi'\sin\psi',
\end{aligned}$$

daher auch umgekehrt:

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi' &= \alpha\cos\varphi \;\; + \beta\sin\varphi\cos\psi \;\; + \gamma\sin\varphi\sin\psi,\\
\sin\varphi'\cos\psi' &= \alpha'\cos\varphi \;\; + \beta'\sin\varphi\cos\psi \;\; + \gamma'\sin\varphi\sin\psi,\\
\sin\varphi\sin\psi' &= \alpha''\cos\varphi + \beta''\sin\varphi\cos\psi + \gamma''\sin\varphi\sin\psi,
\end{aligned}
$$

Nachdem diese Gleichungen in die Funktion $U'$ eingesetzt worden sind, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
a'' &= a'\alpha\alpha \quad + b'\beta\beta \quad + c'\gamma\gamma \quad + 2d'\beta\gamma \quad + 2e'\gamma\alpha \quad + 2f'\alpha\beta,\\
b'' &= a'\alpha'\alpha' \;\; + b'\beta'\beta' \;\; + c'\gamma'\gamma' \;\; + 2d'\beta'\gamma' \;\; + 2e'\gamma'\alpha' \;\; + 2f'\alpha'\beta',\\
c'' &= a'\alpha''\alpha'' + b'\beta''\beta'' + c'\gamma''\gamma'' + 2d'\beta''\gamma'' + 2e'\gamma''\alpha'' + 2f'\alpha''\beta''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d'' &= a'\alpha'\alpha'' + b'\beta'\beta'' + c'\gamma'\gamma'' + d'(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') + e'(\gamma'\alpha'' + \gamma''\alpha') + f'(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta'),\\
e'' &= a'\alpha''\alpha \;\; + b'\beta''\beta \;\; + c'\gamma''\gamma \;\; + d'(\beta''\gamma \;\; + \beta\gamma'') \;\; + e'(\gamma''\alpha \;\; + \gamma\alpha'') \;\; + f'(\alpha''\beta \;\; + \alpha\beta''),\\
f'' &= a'\alpha\alpha' \quad + b'\beta\beta' \quad + c'\gamma\gamma' \quad + d'(\beta\gamma' \quad + \beta'\gamma) \quad + e'(\gamma\alpha' \quad + \gamma'\alpha) \quad + f'(\alpha\beta' \quad + \alpha'\beta).
\end{aligned}
$$

Zwischen den Koeffizienten der vorgelegten Substitution hat man sehr bekannte Relationen, welche in der Transformation eines Systems von orthogonalen Koordinaten in ein anderes System derselben Art gelten. Damit weiter das System von neun Koordinaten dasselbe ist wie das der Hauptachsen des Ellipsoiden, dessen Gleichung $r^2U = 1$ ist, wenn freilich $\frac{1}{G}$, $\frac{1}{G'}$, $\frac{1}{G''}$ die Halbachsen sind, muss diese Gleichung gelten:

$$
U = GG\cos^2\varphi' + G'G'\sin^2\varphi'\cos^2\psi' + G''G''\sin^2\varphi'\sin^2\psi',
$$

woher diese Relationen hervorgehen:

$$
\begin{aligned}
GG\alpha\alpha \;+\; G'G'\alpha'\alpha' \;+\; G''G''\alpha''\alpha'' \;&= a,\\
GG\beta\beta \;+\; G'G'\beta'\beta' \;+\; G''G''\beta''\beta'' \;&= b,\\
GG\gamma\gamma \;+\; G'G'\gamma'\gamma' \;+\; G''G''\gamma''\gamma'' &= c,\\
GG\beta\gamma \;+\; G'G'\beta'\gamma' \;+\; G''G''\beta''\gamma'' &= d,\\
GG\gamma\alpha \;+\; G'G'\gamma'\alpha' \;+\; G''G''\gamma''\alpha'' &= e,\\
GG\alpha\beta \;+\; G'G'\alpha'\beta' \;+\; G''G''\alpha''\beta'' \;&= f,
\end{aligned}
$$

mit welchem wir die folgenden verbinden wollen, die aus den vorhergehenden folgen:

$$
\begin{aligned}
G'^2G''^2\alpha\alpha \;+\; G''^2G^2\alpha'\alpha' \;+\; G^2G'^2\alpha''\alpha'' \;&= bc \;-\; dd,\\
G'^2G''^2\beta\beta \;+\; G''^2G^2\beta'\beta' \;+\; G^2G'^2\beta''\beta'' \;&= ca \;-\; ee,\\
G'^2G''^2\gamma\gamma \;+\; G''^2G^2\gamma'\gamma' \;+\; G^2G'^2\gamma''\gamma'' &= ab \;-\; ff,\\
G'^2G''^2\beta\gamma \;+\; G''^2G^2\beta'\gamma' \;+\; G^2G'^2\beta''\gamma'' &= ef \;-\; ad,\\
G'^2G''^2\gamma\alpha \;+\; G''^2G^2\gamma'\alpha' \;+\; G^2G'^2\gamma''\alpha'' \;&= fd - be,\\
G'^2G''^2\alpha\beta \;+\; G''^2G^2\alpha'\beta' \;+\; G^2G'^2\alpha''\beta'' \;&= de \;-\; cf,\\
G^2G'^2G''^2 = abc - add - bee - cff + 2def.&
\end{aligned}
$$

Die Gleichung des zweiten Ellipsoiden, dessen Hauptachsen als ausfindig zu machen vorgelegt werden, war diese:

$$\frac{a''}{GG}xx + \frac{b''}{G'G'}yy + \frac{c''}{G''G''}zz + \frac{2d''}{G'G''}yz + \frac{2e''}{G''G}zx + \frac{2f''}{GG'}xy = 1,$$

wenn freilich

$$r\cos\eta' = x, \quad r\sin\eta'\cos\vartheta' = y, \quad r\sin\eta'\sin\vartheta' = z$$

ist. Daher, wenn $m$, $p$, $p$ die Halbachsen sind, werden, aus der bekannten Theorie der Hauptachsen der Oberflächen zweiten Ordnung, $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - x^2\left(\frac{a''}{GG} + \frac{b''}{G'G'} + \frac{c''}{G''G''}\right) + x\left(\frac{b''c'' - d''d''}{G'^2G''^2} + \frac{c''a'' - e''e''}{G''^2G^2} + \frac{a''b'' - f''f''}{G^2G'^2}\right)$$

$$-\frac{a''b''c''-a''d''d''-b''e''e''-c''f''f''+2d''e''f''}{G^2G'^2G''^2}=0.$$

Nachdem aber die Werte von $a''$, $b''$ etc. eingesetzt worden sind, lassen sich durch die oben angeführten Relationen und die zwischen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. die Koeffizienten allein über die Größen $a$, $b$, $c$ und $a'$, $b'$, $c'$ etc. ausdrücken. Danach wird die kubische Gleichung mit $G^2G'^2G''^2$ multipliziert zu dieser:

$$\begin{aligned}
&x^3\{abc-add-bee-cff+2def\}\\
&-x^2\left\{\begin{array}{l} \quad a'(bc-dd)+\ \ b'(ca-ee)+\ c'(ab-ff)\\ +2d'(ef-ad)+2e'(fd-be)+2f'(de-cf)\end{array}\right\}\\
&+x\left\{\begin{array}{l} \quad a(b'c'-d'd')+\ \ b(c'a'-e'e')+\ c(a'b'-f'f')\\ +2d(e'f'-a'd')+2e(f'd'-b'e')+2f(d'e'-c'f')\end{array}\right\}\\
&-\quad a'b'b'+a'd'd'+b'e'e'+c'f'f'-2d'e'f'=0.
\end{aligned}$$

Wenn die Wurzeln dieser Gleichung $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ waren, haben wir in § 13 gesehen, dass man findet:

$$E=\frac{1}{\sqrt{abc-add-bee-cff+2def}}\int\int\frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm}+\frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn}+\frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}},$$

nachdem die Integrationen von $\eta=0$, $\vartheta=0$ bis hin zu $\eta=\pi$, $\vartheta=2\pi$ ausgeführt worden sind.

Ich merke an, dass nach Vertauschen von $a$, $b$, $c$ und $a'$, $b'$, $c'$ etc. Größen, die kubische Gleichung in eine andere übergeht, deren Wurzeln die reziproken Werte haben.

## 15.

$$\cos\eta = \frac{g\cos\varphi + h\sin\varphi\cos\psi + i\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{g'\cos\varphi + h'\sin\varphi\cos\psi + i'\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{g''\cos\varphi + h''\sin\varphi\cos\psi + i''\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}}.$$

Die Methode, die wir im Vorausgehenden verwendet haben, ging über drei Transformationen des vorgelegten Integrals vor; ich möchte im Folgenden eine neue und direktere Methode vorstellen, mit welcher wir mit einer einzigen Substitution zur einfachen Form gelangen, in welche wir das Integral $E$ gebracht haben. Und während in der vorhergehenden Methode *zwei* Ellipsoiden, welche auf orthogonale Achsen bezogen worden waren, auf die Hauptachsen bezogen werden mussten, sind mit dieses Methode die Hauptachsen *eines einzigen Ellipsoiden, dessen Gleichung auf schiefwinklige Koordinaten bezogen sind,* ausfindig zu machen.

Es sei das algebraische Problem vorgelegt, *mit den linearen Substitutionen*

$$\begin{aligned} u &= gx + hy + iz, \\ v &= g'x + h'y + i'z, \\ w &= g''x + h''y + i''z \end{aligned}$$

*die zwei folgenden Ausdrücke*

$$\begin{aligned} A &= axx + byy + czz + 2dyz + 2ezx + 2fxy, \\ A' &= a'xx + b'yy + c'zz + 2d'yz + 2e'zx + 2f'xy \end{aligned}$$

*auf die einfache Form, aus welcher die Produkte von je zwei Variablen herausgehen,*

$$A = uu + vv + ww,$$

$$A' = \frac{uu}{mm} + \frac{vv}{nn} + \frac{ww}{pp}.$$

*Ausfindig zu machen sind die Koeffizienten der verwendeten Substitution, und die Größen $m$, $n$, $p$..*

Das vorhergehende Problem hat keine Schwierigkeit und wird leicht auf ein bekanntes geometrisches Problem zurückgeführt. Wir wollen nämlich festlegen:

$$\sqrt{a}\cdot x = x', \qquad \sqrt{b}\cdot y = y', \qquad \sqrt{c}\cdot z = z',$$

$$\frac{d}{\sqrt{bc}} = \cos\lambda, \qquad \frac{e}{\sqrt{ca}} = \cos\mu, \qquad \frac{f}{\sqrt{ab}} = \cos\nu,$$

woher wird:

$$A = x'x' \quad + y'y' \quad + z'z' \quad + 2\cos\lambda y'z' + 2\cos\mu z'x' + 2\cos\nu x'y',$$

$$A' = \frac{a'}{a}x'x' + \frac{b'}{b}y'y' + \frac{c'}{c}z'z' + \frac{2d'}{\sqrt{bc}}y'z' \quad + \frac{2e'}{\sqrt{ca}}z'x' \quad + \frac{2f'}{\sqrt{ab}}x'y'.$$

Weiter werden diese Substitutionen zu verwenden sein:

$$u = \frac{g}{\sqrt{a}}x' + \frac{h}{\sqrt{b}}y' + \frac{i}{\sqrt{c}}z',$$
$$v = \frac{g'}{\sqrt{a}}x' + \frac{h'}{\sqrt{b}}y' + \frac{i'}{\sqrt{c}}z',$$
$$w = \frac{g''}{\sqrt{a}}x' + \frac{h''}{\sqrt{b}}y' + \frac{i''}{\sqrt{c}}z'.$$

Es seien $x'$, $y'$, $z'$ die schiefwinklingen Koordinaten des Punktes, welche die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ miteinander bilden; hier sind $u$, $v$, $w$ die orthogonalen Koordinaten des Punktes, die denselben Ursprung haben, das Quadrat des Abstands des Punktes vom gemeinsamen Ursprung der Koordinaten kann entweder durch die Formel $A$ oder durch $uu + vv + ww$ ausgedrückt werden, woher diese erste Gleichung Geltung haben muss:

$$A = uu + vv + ww.$$

Es seien weiter $u$, $v$, $w$ auf die Hauptachsen des Ellipsoiden bezogen, dessen Gleichung, bezogen auf die schiefwinklingen Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$,

$$A' = 1$$

ist; es muss diese andere Gleichung Geltung haben:

$$A' = \frac{uu}{mm} + \frac{vv}{nn} + \frac{ww}{pp},$$

wenn freilich $m$, $n$, $p$ die Halbachsen des Ellipsoiden sind. Daher *stimmt das vorgelegte Problem mit dem geometrischen Problem überein, die Hauptachsen des Ellipsoiden ausfindig zu machen, dessen Gleichung $A' = 1$ ist, während $x'$, $y'$, $z'$ die schiefwinkligen Koordinaten bezeichnen, welche die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ miteinander bilden.* Die Analysis dieses Problems wird auch anderenorts gefunden, und ist auch von mir im Diario Crellii Vol. II pag. 227 dargeboten worden. (Vergleich diesen Band, Seite 47).

An erwähnter Stelle habe ich bewiesen, wenn freilich die Gleichung des Ellipsoiden

$$Ax'x' + By'y' + Cz'z' + 2ay'z' + 2bz'x' + 2cx'y' = 1$$

ist, dass $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ die Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind:

$$(x-A)(x-B)(x-C) - (x-A)(x\cos\lambda - a)^2 - (x-B)(x\cos\mu - b)^2$$
$$- (x-C)(x\cos\nu - c)^2 + 2(x\cos\lambda - a)(x\cos\mu - b)(x\cos\nu - c) = 0.$$

An dieser Stelle wird also anstelle vom

$$A, \quad B, \quad C, \quad a, \quad b, \quad c$$

zu schreiben sein:

$$\frac{a'}{a}, \quad \frac{b'}{b}, \quad \frac{c'}{c}, \quad \frac{d'}{\sqrt{bc}}, \quad \frac{e'}{\sqrt{ca}}, \quad \frac{f'}{\sqrt{ab}}.$$

Daher, wenn wir darüber hinaus wieder diese Werte einsetzen:

$$\cos\lambda = \frac{d}{\sqrt{bc}}, \quad \cos\mu = \frac{e}{\sqrt{ca}}, \quad \cos\nu = \frac{f}{\sqrt{ab}},$$

wird die kubische Gleichung, mit *abc* multipliziert:

$$(ax-a')(bx-b')(cx-c')-(ax-a')(dx-d')^2-(bx-b')(ex-e')^2$$
$$-(cx-c')(fx-f')^2+2(dx-d')(ex-e')(fx-f')=0.$$

Diese stimmt vollkommen mit der überein, zu welcher wir im vorgehenden § gelangt sind. Nachdem dieselben Änderungen vorgenommen worden sind, erhält man aus den an erwähnter Stelle angegebenen Formeln die Werte der Koeffizienten $\frac{g}{\sqrt{a}}$, $\frac{h}{\sqrt{b}}$, $\frac{i}{\sqrt{c}}$ und daher auch die von $g$, $h$, $i$.

## 16.

Ich bemerke allgemein, dass nach Vorlegen der Gleichung

$$\begin{aligned} u &= gx + hy + iz, \\ v &= g'x + h'y + i'z, \\ w &= g''x + h''y + i''z, \end{aligned}$$

wenn freilich $x$, $y$, $z$ und daher auch $u$, $v$, $w$ als Funktionen der zwei Variablen $\varphi$, $\psi$ betrachtet werden, nachdem der Kürze wegen

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi} - \frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\varphi}, \\ M &= \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi} - \frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \\ N &= \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{aligned}$$

gesetzt worden ist, wird:

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial \psi}\frac{\partial w}{\partial \varphi} = (h'i'' - h''i')L + (i'g'' - i''g')M + (g'h'' - g''h')N,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = (h''i - hi'')L + (i''g - ig'')M + (g''h - gh'')N,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = (hi' - h'i)L + (ig' - i'g)M + (gh' - g'h)N.$$

Nachdem diese Gleichungen respektive mit $u$, $v$, $w$ multipliziert worden sind und sie summiert worden sind, dann die Terme verworfen worden sind, die sich aufheben, geht hervor:

$$(17)\quad \begin{cases} \quad u\left[\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial \psi}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] + v\left[\frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right] + w\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right] \\ = P\left\{x\left[\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right] + y\left[\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right] + z\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right]\right\}, \end{cases}$$

nachdem der Kürze wegen gesetzt worden ist:

$$P = g(h'i'' - h''i') + g'(h''i - hi'') + g''(hi' - h'i).$$

Nachdem dies vorausgeschickt worden ist, sei nun

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi\cos\psi, \quad z = \sin\varphi\sin\psi,$$

es sei weiter

$$\cos\eta = \frac{u}{\sqrt{uu+vv+ww}}, \quad \sin\eta\cos\vartheta = \frac{v}{\sqrt{uu+vv+ww}}, \quad \sin\eta\sin\vartheta = \frac{w}{\sqrt{uu+vv+ww}}.$$

Nachdem wir den Koeffizienten $g$, $h$, $i$ etc. dieselben Werte wie im vorhergehenden § zuteilen, wird sein:

$$A = U = uu + vv + ww,$$

$$A' = U' = \frac{uu}{mm} + \frac{vv}{nn} + \frac{ww}{pp},$$

und daher:

$$\frac{U'}{U} = \frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}.$$

Aber die zwischen $u$, $v$, $w$ und $x$, $y$, $z$ vorgelegten linearen Gleichungen werden:

$$\cos\eta = \frac{g\cos\varphi + h\sin\varphi\cos\psi + i\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{g'\cos\varphi + h'\sin\varphi\cos\psi + i'\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{g''\cos\varphi + h''\sin\varphi\cos\psi + i''\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}}.$$

Man hat weiter aus § 1:

$$x\left[\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi} - \frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\psi}\right] + y\left[\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi} - \frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial x}{\partial\psi}\right] + z\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\psi}\right] = \sin\varphi,$$

$$\frac{u\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial w}{\partial\psi} - \frac{\partial v}{\partial\psi}\frac{\partial w}{\partial\psi}\right] + v\left[\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\psi} - \frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial u}{\partial\psi}\right] + w\left[\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial v}{\partial\psi}\right]}{[uu+vv+ww]^{\frac{3}{2}}} d\varphi d\psi = \sin\eta d\eta d\vartheta$$

und daher aus Formel (17):

$$\frac{\sin\varphi d\varphi d\phi}{U^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{P}\cdot\sin\eta d\eta d\vartheta,$$

woher auch:

$$\frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{U'\sqrt{U}} = \frac{1}{P}\cdot\frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}.$$

Den einzelnen Werten von $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ entsprechen reelle Werte und zwar eindeutig die der Größen $\sin\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$; und leicht ist klar, dass den einzelnen Werten von $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\varphi\sin\vartheta$ umgekehrt reelle Werte entsprechen und zwar eindeutig die der Größen $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$,

$\sin\varphi\sin\psi$. Daher, nachdem all diesen reelle Werte zugeteilt worden sind, kommen auch jenen Werten nur reelle Werte zu, und das freilich nicht mehr als auf eine Weise; oder nach Integrieren von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bis hin zu $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi$ muss auch von $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ bis hin zu $\eta = \pi$, $\vartheta = 2\pi$, oder was dasselbe ist, nachdem dasselbe Integral über die ganze Kugel erstreckt worden ist, muss auch das transformierte Integral über die ganze Sphäre erstreckt werden.

Es verbleibt, dass wir die Konstante $P$ mit den gegebenen Größen darbieten; das geschieht leicht mit den folgenden geometrischen Betrachtungen. Während nämlich wie oben $x'$, $y'$, $z'$ schiefwinklige Koordinaten, $u$, $v$, $w$ orthogonale Koordinaten bezeichnen, wonach wird:

$$u = \frac{g}{\sqrt{a}}x' + \frac{h}{\sqrt{b}}y' + \frac{i}{\sqrt{c}}z',$$
$$v = \frac{g'}{\sqrt{a}}x' + \frac{h'}{\sqrt{b}}y' + \frac{i'}{\sqrt{c}}z',$$
$$w = \frac{g''}{\sqrt{a}}x' + \frac{h''}{\sqrt{b}}y' + \frac{i''}{\sqrt{c}}z',$$

sind

$\frac{g}{\sqrt{a}}, \frac{g'}{\sqrt{a}}, \frac{g''}{\sqrt{a}}$ Die Kosinus der Winkel zwischen $x'$ und den orthogonalen Achsen

$\frac{h}{\sqrt{b}}, \frac{h'}{\sqrt{b}}, \frac{h''}{\sqrt{b}}$ Die Kosinus der Winkel zwischen $y'$ und den orthogonalen Achsen

$\frac{i}{\sqrt{c}}, \frac{i'}{\sqrt{c}}, \frac{i''}{\sqrt{c}}$ Die Kosinus der Winkel zwischen $z'$ und den orthogonalen Achsen,

woher aus den Elementen der analytischen Geometrie bekannt ist, dass $\frac{P}{\sqrt{abc}}$ das Parallelepiped ist, begrenzt von den Achsen $x'$, $y'$, $z'$ und mit Seitenlänge $= 1$. Dasselbe wird bestätigt

$$\sqrt{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}$$

zu sein. Nachdem die beiden Ausdrücke gleich gesetzt worden sind und die Werte

$$\cos\lambda = \frac{d}{\sqrt{bc}}, \quad \cos\mu = \frac{e}{\sqrt{ca}}, \quad \cos\nu = \frac{f}{\sqrt{ab}}$$

eingesetzt worden sind, geht hervor:

$$P = \sqrt{abc - add - bee - cff + 2def}.$$

Daher ergibt sich schließlich, nachdem der Wert von $P$ eingesetzt worden ist und die Doppelintegration durchgeführt worden ist,

$$E = \int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{U'\sqrt{U}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{abc - add - bee - cff + 2def}} \int\int \frac{\sin\eta d\eta d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin\vartheta}{pp}},$$

wobei die Integrale über die ganze Sphäre erstreckt worden sind und $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(ax-a')(bx-b')(cx-c') - (ax-a')(dx-d')^2 - (bx-b')(ex-e')^2$$

$$-(cx-c')(fx-f')^2 + 2(dx-d')(ex-e')(fx-f') = 0$$

bezeichnen. Diese stimmen völlig mit den oben gefundenen überein. Wir sehen, dass diese Transformation durch eine einzige Substitution gefunden wird:

$$\cos\eta = \frac{g\cos\varphi + h\sin\varphi\cos\psi + i\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}}$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{g'\cos\varphi + h'\sin\varphi\cos\psi + i'\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}}$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{g''\cos\varphi + h''\sin\varphi\cos\psi + i''\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

nachdem die Koeffizienten $g$, $h$, $i$ entsprechend bestimmt worden sind.

## 17.

Wir haben in Beispiel II § 8, 15 diese Formel angegeben

$$B = \frac{1}{mnp} \int\int \frac{\sin\eta d\eta d\varphi}{\dfrac{\cos^2\eta}{mm} + \dfrac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \dfrac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}} = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x+mm)(x+nn)(x+pp)}},$$

nachdem das Doppelintegral von $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ bis hin zu $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erstreckt worden ist. Daher wird, nachdem das Doppelintegral über die ganze Sphäre erstreckt worden ist,

$$\int\int \frac{\sin\eta d\eta d\varphi}{\dfrac{\cos^2\eta}{mm} + \dfrac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \dfrac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}} = 2\pi\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{mm}\right)\left(1+\frac{x}{nn}\right)\left(1+\frac{x}{pp}\right)}}.$$

Daraus ist klar, *dass die Größe, welche im einfachen Integral unter der Wurzel gefunden wird, rational dargeboten werden kann, auch wenn* $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ *nur als Wurzeln einer kubischen Gleichung gegeben sind.* Wenn dies auf den im Vorhergehenden vorgelegten Fall angewandt wird, sind $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ als Wurzel der Gleichung

$$\begin{gathered}(ax-a')(bx-b')(cx-c') - (ax-a')(dx-d')^2 - (bx-b')(ex-e')^2 \\ -(cx-c')(fx-f')^2 + 2(dx-d')(ex-e')(fx-f') = 0\end{gathered}$$

gegeben. Daher wird der Ausdruck zur Linken mit diesem

$$PP\left(x-\frac{1}{mm}\right)\left(x-\frac{1}{nn}\right)\left(x-\frac{1}{pp}\right)$$

identisch sein. Nachdem $-\frac{1}{x}$ anstelle von $x$ gesetzt und dann mit $-x^3$ multipliziert worden ist, erlangen wir daraus die folgende identische Gleichung:

$$\begin{gathered}PP\left(1+\frac{x}{mm}\right)\left(1+\frac{x}{nn}\right)\left(1+\frac{x}{pp}\right) \\ = (a+a'x)(b+b'x)(c+c'x) - (a+a'x)(d+d'x)^2 - (b+b'x)(e+e'x)^2 \\ -(c+c'x)(f+f'x)^2 + 2(d+d'x)(e+e'x)(f+f'x).\end{gathered}$$

Daher hat man nun ein sehr bemerkenswertes Theorem, in welchem das vorgelegte Doppelintegral $E$ *von einer Auflösung einer algebraischen Gleichung* durch ein einfaches Integral ausgedrückt wird.

**Theorem**

*Man setze*

$$\begin{aligned}
U &= a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\cos^2\psi + c\sin^2\varphi\sin^2\psi \\
&\quad +2d\sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi + 2e\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi, \\
U' &= a'\cos^2\varphi + b'\sin^2\varphi\cos^2\psi + c'\sin^2\varphi\sin^2\psi \\
&\quad +2d'\sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi + 2e'\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f'\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi, \\
X &= = (a+a'x)(b+b'x)(c+c'x) - (a+a'x)(d+d'x)^2 - (b+b'x)(e+e'x)^2 \\
&\quad -(c+c'x)(f+f'x)^2 + 2(d+d'x)(e+e'x)(f+f'x),
\end{aligned}$$

*es wird*

$$\int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{U'\sqrt{U}} = 2\pi\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

*sein, nachdem das Doppelintegral von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bis hin zu $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi$ erstreckt worden ist.*

Aus dem vorhergehenden sehr allgemeinen Theorem folgen diese Spezialfälle:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{U}} \\ &= 2\pi\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a+x)(b+x)(c+x) - dd(a+x) - ee(b+x) - ff(c+x) + 2def}}, \end{aligned}\right.$$

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{U} \\ &= 2\pi\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x[(a+x)(b+x)(c+x) - dd(a+x) - ee(b+x) - ff(c+x) + 2def]}} \end{aligned}\right.$$

$$(3.)\quad \int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{U^3}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc - add - bee - cff + 2def}}.$$

Was (2.) betrifft, bemerke ich, dass allgemein, nachdem $a$, $b$, $c$ etc. und $a'$, $b'$, $c'$ etc. miteinander vertauscht worden sind, und zugleich $\frac{1}{x}$ anstelle von $x$ gesetzt worden ist, die beiden Formeln

$$\int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{U'\sqrt{U}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\int \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{U\sqrt{U'}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{xX}}$$

jeweils auseinander folgen.

Königsberg, 1. November 1832.